

Chapitre 4

Trigonométrie

Plan du chapitre

1	Fonctions cosinus et sinus	1
1.1	Rappels, définitions et valeurs particulières	1
1.2	Formules trigo du cosinus et du sinus (sauf les formules issues des nombres complexes)	3
1.3	Parenthèse : congruences dans les réels	5
1.4	Équations trigonométriques (cosinus et sinus)	7
1.5	Parenthèse : union infinie de sous-ensembles de $\mathbb{R}$	7
1.6	Inéquations trigonométriques (cosinus et sinus)	8
2	Fonction tangente	10
2.1	Définition et valeur particulières	10
2.2	Quelques formules (tangente)	11
2.3	Équations avec tangente	12
3	Quelques compléments	13
3.1	Formules de l'angle moitié et du triangle rectangle	13
3.2	Cotangente	13
3.3	Transformation d'une expression en $A \cos(x - \varphi)$	13
4	Méthodes pour les exercices	16

1 Fonctions cosinus et sinus

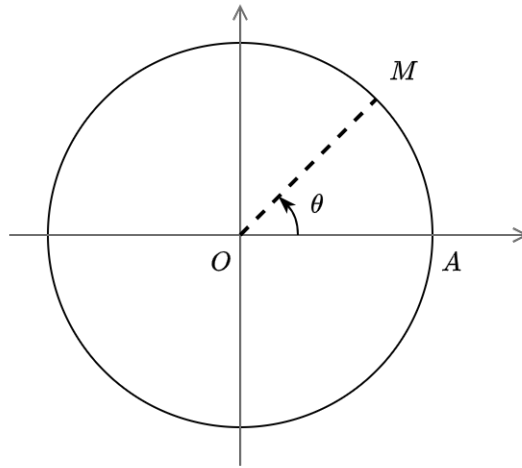
1.1 Rappels, définitions et valeurs particulières

Définition 4.1 – Cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique (ou cercle unité) le cercle du plan de centre 0 et de rayon 1.

On considère A le point de coordonnées $(1, 0)$ et M un point quelconque du cercle unité. On note θ l'angle orienté $(\vec{OA}, \vec{OM})$.

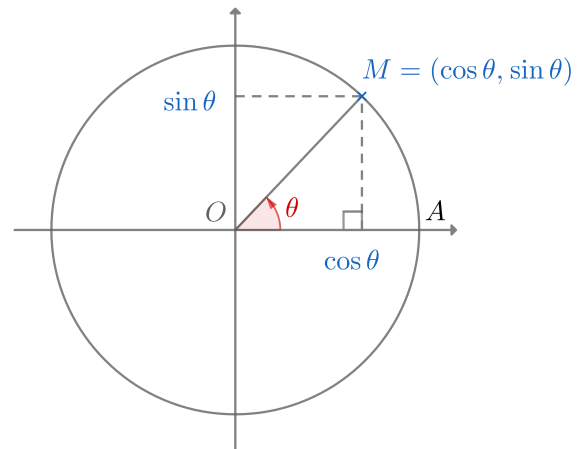
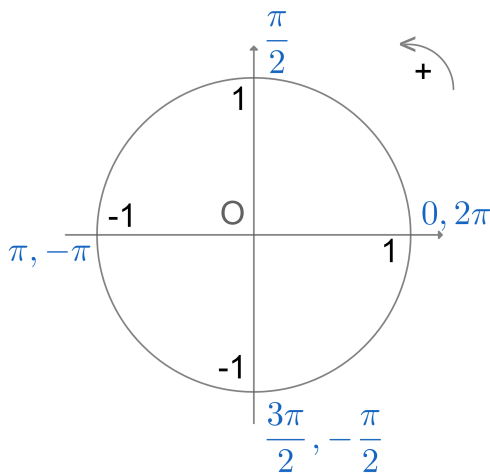




Plutôt que d'exprimer l'angle θ en degrés, en prépa on utilise les radians. La valeur θ en radian correspond à la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AM}$ qu'on obtient lorsqu'on part du point A et qu'on parcourt le cercle jusqu'à M dans le sens *inverse* des aiguilles d'une montre, ce qu'on appelle le sens trigonométrique ou encore sens positif.

Exemple. Si M est le point de coordonnées $(0, 1)$, alors l'arc $\widehat{AM}$ a une longueur égale à un quart de la circonférence du cercle unité, soit $\frac{2\pi \times 1}{4}$, donc l'angle θ vaut $\frac{\pi}{2}$ (radians).

Remarque. En réalité, le point M étant fixé, il y a plusieurs valeurs possibles pour l'angle θ , du fait qu'on peut faire un tour complet dans un sens ou dans l'autre. Par exemple les angles $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ représentent le même point du cercle unité :



Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les angles θ et $\theta + 2k\pi$ représentent les mêmes points sur le cercle unité (ce qui ne veut pas dire que θ et $\theta + 2k\pi$ sont égaux !).

Définition 4.2

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, il existe un unique point M du cercle unité tel que l'angle orienté $(\vec{OA}, \vec{OM})$ soit égal à θ . On définit alors :

$\cos \theta :=$ "abscisse de M"

$\sin \theta :=$ "ordonnée de M"

Théorème 4.3

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par construction,

- $\cos \theta$ et $\sin \theta$ appartiennent à $[-1, 1]$.
- $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$ et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$.
- $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
- La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire

Démonstration. La première assertion est évidente. Pour la deuxième assertion, les angles θ et $\theta + 2\pi$ représentent le même point M sur le cercle unité, donc les coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$ et $(\cos(\theta + 2\pi), \sin(\theta + 2\pi))$ sont égales. Montrons la troisième assertion. Le triangle rectangle contenant le point M (représenté sur la figure) a une hypoténuse de longueur 1 et des côtés de longueur $|\cos \theta|$ et $|\sin \theta|$. Ainsi par le théorème de Pythagore, $|\cos \theta|^2 + |\sin \theta|^2 = 1^2$, d'où le résultat car pour tout réel x , on a $|x|^2 = x^2$. $\square$

Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Mémo-astuce : les valeurs sont croissantes pour sin et décroissantes pour cos. De plus, les valeurs suivent le motif suivant :

$$\underbrace{\frac{\sqrt{0}}{2}}_{=0} \quad \underbrace{\frac{\sqrt{1}}{2}}_{=1/2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \underbrace{\frac{\sqrt{4}}{2}}_{=1}$$

1.2 Formules trigo du cosinus et du sinus (sauf les formules issues des nombres complexes)
Théorème 4.4 – Formules de changement de quadrans

$$\begin{array}{ll} \cos(x + \pi) = -\cos x & \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(x + \pi) = -\sin x & \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{array}$$

Mémo-astuce : toutes ces formules sont faciles à retrouver sur un dessin avec le point M associé à l'angle $x = \frac{\pi}{6}$:

Théorème 4.5 – Formules d'addition

Pour tous réels a, b

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Mémo-astuce : avec $\cos$, on *change le signe*, mais pas avec $\sin$. En revanche, $\sin$ *mélange* les $\cos$ et les $\sin$, tandis que $\cos$ ne cause pas de mélange. De plus, les deux formules avec $a - b$ se déduisent aisément des autres en remplaçant b par $-b$.

Exemple. Retrouver la formule de $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ avec une formule d'addition.

Théorème 4.6 – Formules de duplication

Pour tout réel x ,

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$$

Mémo-astuce : La formule $\sin(2x)$ peut se retrouver à partir de $\sin(a+b)$ avec $a = b = x$. Pour les trois autres, on peut se rappeler le dessin très pratique ci-contre :

Muni de ce diagramme, on peut raisonner comme avec des vecteurs. Par exemple, comme :

$$(1, -1) = 1 \times (1, 0) + (-1) \times (0, 1)$$

on a :

$$\underbrace{\cos(2x)}_{\text{"vecteur" } (1, -1)} = 1 \times \underbrace{\cos^2 x}_{\text{"vecteur" } (1, 0)} + (-1) \times \underbrace{\sin^2 x}_{\text{"vecteur" } (0, 1)}$$

Exemple. Calculer $\int_0^{2\pi} \cos(2x) dx$. En déduire $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$.

Théorème 4.7 – Formules de linéarisation

Pour tous réels a, b ,

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin a \sin b &= -\frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b)) \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))\end{aligned}$$

Démonstration. Prouvons par exemple la deuxième formule :

□

Mémo-astuce : comme le montre la preuve, on les retrouve facilement à partir des formules d'addition. Pour $\cos a \cos b$ et $\sin a \sin b$, comme il n'y a pas de mélange de cosinus et de sinus, il faut utiliser les formules de $\cos(a+b)$ et de $\cos(a-b)$. Pour $\sin a \cos b$, comme il y a un mélange, il faut se servir de $\sin(a+b)$ et de $\sin(a-b)$.

1.3 Parenthèse : congruences dans les réels

Notation. Soit $x, a, b \in \mathbb{R}$. La notation $x \equiv a [b]$ signifie :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad x = a + bk$$

ou encore, ce qui est équivalent :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad x - a = bk$$

Exemple 1. On a $\frac{3\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ et $3\pi \equiv -\pi [2\pi]$.

Théorème 4.8 – Règles de calcul avec des congruences

Soit $x, y, z, b \in \mathbb{R}$.

- Symétrie : $x \equiv y [b]$ si et seulement si $y \equiv x [b]$.
- Transitivité : si $x \equiv y [b]$ et $y \equiv z [b]$, alors $x \equiv z [b]$.
- On peut multiplier ou diviser par une constante **non nulle** (crochet inclus) :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^* \quad x \equiv y [b] \iff \lambda x \equiv \lambda y [\lambda b]$$

- On peut additionner ou soustraire une même quantité (crochet exclu) :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad x \equiv y [b] \iff x + u \equiv y + u [b]$$

Notation. Tout comme les opérations “=” et “ $\iff$ ”, on peut écrire plusieurs congruences à la chaînes :

$$x \equiv y \equiv z [b] \iff \begin{cases} x \equiv y [b] \\ y \equiv z [b] \end{cases}$$

Notation. • Pour tous réels a et b , on note :

$$\begin{aligned} a + b\mathbb{Z} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv a [b]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = a + bk\} \\ &= \{\dots, a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b, \dots\} \end{aligned}$$

- On peut aussi noter $b\mathbb{Z} + a$ au lieu de $a + b\mathbb{Z}$.
- Enfin, si $a = 0$, on peut simplement noter $b\mathbb{Z}$ cet ensemble.

Exemple.

$$\begin{aligned} 2\mathbb{Z} + 1 &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 2k + 1\} \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$2\mathbb{Z} = \dots\dots\dots$$

Ainsi, $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers $\dots\dots\dots$ et $2\mathbb{Z} + 1$ est l'ensemble des entiers $\dots\dots\dots$

Exemple.

$$\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \dots\dots\dots$$

Théorème 4.9

Soit $a, b, x \in \mathbb{R}$.

$$x \equiv a [b] \iff x \in a + b\mathbb{Z}$$

Exemple. $x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

1.4 Équations trigonométriques (cosinus et sinus)

Théorème 4.10 – Équations et trigonométrie

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos a = \cos b \iff (a \equiv b [2\pi] \text{ ou } a \equiv -b [2\pi])$$

$$\sin a = \sin b \iff (a \equiv b [2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b [2\pi])$$

Mémo-astuce On peut vérifier la validité du sens réciproque ($\iff$) de chaque assertion :

- Comme $\cos(-b) = \cos b$, si $a \equiv -b [2\pi]$, on a bien $\cos(a) = \cos(-b) = \cos(b)$.
- Comme $\sin(\pi - b) = \sin b$, si $a \equiv \pi - b [2\pi]$, on a bien $\sin(a) = \sin(\pi - b) = \sin b$.

4.11 ★★ Résoudre $2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

Solution.

1.5 Parenthèse : union infinie de sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Définition 4.12

On dit que $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (indexée par $\mathbb{Z}$) si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $A_k \subset \mathbb{R}$.

- Exemple.**
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $A_k = \{k\}$: on obtient une famille $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
 - Idem si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $A_k = [k, k+1]$.
 - Idem si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $A_k = [2k\pi, 2k\pi + \pi]$.

Définition 4.13 – Union infinie d'ensembles

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. L'union de ces ensembles est notée

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$$

C'est l'ensemble des réels x qui appartiennent à au moins un des ensembles A_k :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{N} \quad x \in A_k\}$$

- Exemple.**
- $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\} = \dots\dots\dots$
 - $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1] = \dots\dots\dots$

Théorème 4.14

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad x \in A_k$$

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, 2k\pi + \pi] \iff \dots\dots\dots$$

$$\iff \dots\dots\dots$$

1.6 Inéquations trigonométriques (cosinus et sinus)

Pour les inégalités, on les traite au cas par cas en s'aidant d'un cercle trigonométrique.

Méthode – La méthode du “rond-point”

Considérons par exemple l'inégalité $\cos(\theta(x)) \leq M$, avec $M \in \mathbb{R}$ et $\theta(x)$ une expression qui peut dépendre d'un réel x .

1. On pose $X = \theta(x)$, de sorte qu'on doit résoudre $\cos(X) \leq M$.
2. Facultatif : on dessine un cercle trigo et on marque la portion du cercle pour laquelle $\cos(X) \leq M$: on **oriente** cette portion et on identifie des angles θ_1, θ_2 avec $\theta_1 \leq \theta_2$ qui encadrent cette portion et seulement celle-là.
3. On résout $\cos(X) \leq M$ sur une période : on choisit un intervalle de longueur 2π qui contient $[\theta_1, \theta_2]$, qu'on note par exemple $I_{2\pi}$:

$$\begin{cases} \cos(X) \leq M \\ X \in I_{2\pi} \end{cases} \iff \theta_1 \leq X \leq \theta_2$$

4. On complète par 2π -périodicité du cosinus :

$$\cos(X) \leq M \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 + 2k\pi \leq X \leq \theta_2 + 2k\pi$$

5. On remplace X par $\theta(x)$ et on isole x :

$$\begin{aligned} \cos(\theta(x)) \leq M &\iff \dots \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad a_1 + b_1k \leq x \leq a_2 + b_2k \\ &\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [a_1 + b_1k, a_2 + b_2k] \end{aligned}$$

4.15 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \leq -\frac{1}{2}$.

Solution.

Remarque. Le choix des valeurs de θ_1 et de θ_2 n'est pas unique, on peut ajouter ou retrancher 2π à θ_1 et θ_2 : cela conduira au même ensemble de solutions.

$$\begin{aligned} & \exists k \in \mathbb{Z} \quad (\theta_1 + 2\pi) + 2k\pi \leq X \leq (\theta_2 + 2\pi) + 2k\pi \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 + 2(k+1)\pi \leq X \leq \theta_2 + 2(k+1)\pi \\ \iff & \exists k' \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 + 2k'\pi \leq X \leq \theta_2 + 2k'\pi \quad (k' = k+1) \end{aligned}$$

Remarque. Lorsque la portion de cercle est **orientée** dans le sens trigonométrique, l'angle θ_1 se trouve au **début** de la flèche et l'angle θ_2 se trouve à la **fin** de la flèche.

- Pour l'angle θ_1 , on peut prendre la valeur qu'on souhaite (à 2π près).
- Une fois θ_1 fixé, pour l'angle θ_2 , on prend la plus petite valeur telle que $\theta_2 \geq \theta_1$ à 2π près.

Remarque. Avec une inégalité stricte (par exemple $\sin(\theta) < a$), cela entraîne que les valeurs θ_1 et θ_2 doivent être exclues : on aura alors

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 + 2k\pi < X < \theta_2 + 2k\pi$$

2 Fonction tangente

2.1 Définition et valeur particulières

Définition 4.16 – Tangente

La fonction tangente est définie par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Cette fonction est définie en tout réel x sauf en les valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, ou encore en tout réel x tel que $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Autrement dit, le domaine de définition de la fonction tangente est $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. À partir de l'expression de $\tan(x)$, on retrouve facilement des valeurs particulières :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

2.2 Quelques formules (tangente)

Toujours à partir de la définition, on peut en déduire des formules sur $\tan(x + \pi)$, $\tan(\pi - x)$, etc. Les plus importantes sont :

$$\begin{aligned}\tan(-x) &= -\tan x && (\tan \text{ est impaire}) \\ \tan(x + \pi) &= \tan x && (\tan \text{ est } \pi\text{-périodique})\end{aligned}$$

Théorème 4.17 – Formules d'addition, tangente

Pour tous réels a et b ,

- Si $a, b, a + b \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$, on a :
- Si $a, b, a - b \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$, on a :

La condition $a, b, a \pm b \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ permet d'assurer que les termes $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a \pm b)$ ont tous un sens. Il se trouve que sous cette condition, on a aussi $\tan a \tan b \neq \pm 1$, de sorte que le dénominateur de ces formules ne s'annule pas.

Démonstration.

□

Remarque. De ces formules, on obtient ainsi formule de duplication de $\tan(2a)$:

$$\tan(2a) = \tan(a + a) =$$

Cette formule n'est valide que si

2.3 Équations avec tangente

Théorème 4.18 – Équations et trigonométrie

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a, b \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$.

$$\tan a = \tan b \iff a \equiv b [\pi]$$

4.19 ★★ Résoudre l'équation $\tan(2x) = \sqrt{3}$.

Solution.

3 Quelques compléments

3.1 Formules de l'angle moitié et du triangle rectangle

Théorème 4.20 – Formules de l'angle moitié

Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$, on a :

$$\cos(2x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \sin(2x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

La dernière formule n'étant valide que si $x \neq \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$ et $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$.

La troisième formule n'est qu'une répétition de la formule de duplication de $\tan(2a)$ vue plus haut.

Remarque. À ce stade, les deux premières formules nous sont peu utiles... Mais lorsqu'on devra calculer des intégrales de fonctions trigonométriques, elles peuvent nous sauver la mise !

Dans un triangle *rectangle*, si x est un angle qui n'est pas l'angle droit,

$$\cos x = \frac{A}{H} \quad \sin x = \frac{O}{H} \quad \tan x = \frac{O}{A} \quad (\text{relation CAH-SOH-TOA})$$

avec H la longueur de l'hypoténuse, O celle du côté opposé à l'angle x , et A celle du côté adjacent (qui n'est pas l'hypoténuse).

3.2 Cotangente

Définition 4.21 – Cotangente

La cotangente d'un réel x est définie par $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Cette fonction est définie en tout réel x sauf en les valeurs $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, ou encore en tout réel x tel que $x \not\equiv 0 [\pi]$.

Dit autrement, l'ensemble de définition de la cotangente est $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

3.3 Transformation d'une expression en $A \cos(x - \varphi)$

Enfin, on donne une technique de transformation qui peut s'avérer utile dans plusieurs matières :

Méthode – **Transformer** $a \cos(x) + b \sin(x)$ **en** $A \cos(x - \varphi)$

Soit $a, b, x \in \mathbb{R}$. On veut réécrire $a \cos x + b \sin x$ sous la forme $A \cos(x - \varphi)$ avec $A > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On suppose $(a, b) \neq (0, 0)$, qui est un cas trivial.

1. Factoriser par le réel $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, quitte à forcer son apparition avec des termes $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
2. Trouver un réel φ tel que $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
3. Reconnaître une formule d'addition pour obtenir $\cos(x - \varphi)$, de sorte que $a \cos x + b \sin x = A \cos(x - \varphi)$ avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

4.22 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$.

Solution.

4 Méthodes pour les exercices

Avant toute chose, il faudra bien apprendre la quasi-totalité des formules de ce cours. La plupart des exercices peuvent être traités très facilement en appliquant la bonne formule.

Méthode

Pour résoudre une équation (“=”) trigonométrique, on se ramène à une écriture de la forme $\cos(a) = \cos(b)$, ou $\sin(a) = \sin(b)$, ou $\tan(a) = \tan(b)$, puis on applique le résultat adapté.

Méthode

Pour résoudre une inéquation (“ $\leq$ ”) trigonométrique, on utilise la méthode du rond-point, cf section [1.6](#).